جامعة البعث	امتحان مقرر الدوال محدودة التغير	اسم الطالب : [redacted]
كلية العلوم	الفصل الثاني للعام 2014 /2015	الدرجة : 100
قسم الرياضيات	السنة الثالثة - رياضيات	المدة : 90 دقيقة

السؤال الأول(35 درجة): أ) إذا كانت f دالة تحقق شرط ليبشتز على $[a,b]$، فأثبت أنها تكون مستمرة مطلقاً عليها ، ثم حقق ذلك من أجل الدالة : $f(x)=|x|$ على $[-2,2]$ و هل هي قيوسة عليها و لماذا؟.

ب) بين أن مجموع قفزات الدالة:

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ 0\le x\le 2 \\ x+3 & ; \ 2<x<5 \\ 9 & : \ 5\le x\le 6 \end{cases}$$

في نقاط انقطاعها الداخلية على هذه الفترة أقل أو يساوي الفرق: $\varphi(6)-\varphi(0)$.

-ادرس محدودية التغير لهذه الدالة و كموليتها ريمانياً على $[0,6]$ و ما هو قياس مجموعة نقاط انقطاعها لوبيغياً و لماذا؟

ت)- تأكد من وجود تكامل ستيلجس للدالة: $g(x)=x^2$ بالنسبة ل φ الموجودة في الطلب (ب) ثم احسب قيمته في حال وجوده (أي $J=(S)\int g\ d\varphi$).

السؤال الثاني(30 درجة): أ) -إذا كانت الدالة h مستمرة تقريباً في كل مكان على الفترة $[a,b]$ ، فناقش كموليتها لوبيغياً على هذه الفترة ، و متى تكون الدالة العقدية ذ ت م على فترة حقيقية $[a,b]$.

ب)أوجد دالة التغير للدالة : $f(x)=\sqrt{x}$ على الفترة $[1,5]$مع تغيرها الكلي عليها، وماذا بشأن استمرار دالة التغير الناتجة عند النقطة $x=1$ ، و نوع إطراد الدالة $v_f(x)-f(x)$

ت)بتعيين المجموعة $E(\psi>c)$، أثبت أن الدالة :

$$\psi(x)=\begin{cases} 0 & ; \ x=0 \\ \dfrac{1}{x^2} & ; \ x\ne 0 \end{cases}$$

قيوسة على الفترة$[-1,1]$حيث c أي عدد حقيقي .

السؤال الثالث(35 درجة): أ) -اكتب صيغة الدالة المميزة على الفترة $[0,1]$، ثم ناقش وجود تكامل ليبيغ لها من عدمه على نفس الفترة ، و أحسبه في حال وجوده .

-عبر عن تكامل ستيلجس المعتل التالي: $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,d[x]$ على شكل متسلسلة عددية لانهائية مع دراسة تقارب هذا التكامل أو تباعده (حيث $[x]$ دالة الصحيح).

ب)لو أخذنا المجموعة $X=\{1,2,3,4\}$ و الصف $S=\{\Phi, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

و المطلوب :بين أن S تبولوجيا على X و هل هو جبر ، جبر تام ؟ مع ذكر السبب.

- لنضع $\mu^*(E)=\sqrt{|E|}$ حيث $E\subseteq X$ و$|E|$ تمثل عدد عناصر هذه المجموعة،

والمطلوب:بين أن μ^* هذا قياساً خارجياً على X و ليس قياساً (X نفس المجموعة أعلاه).

ت)إذا كان μ قياساً منتهياً على جبر تام ما S_1 ، فناقش صحة المساواة:

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right) \ ; E_n=\left[-\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1}\right], n\ge 1$$

نهاية الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

خمص في 2015/6/29

مدرس المقرر: د.محمد عامر

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الأول للعام 2013/ 2014
السنة الثالثة - رياضيات

اسم الطالب : [redacted]
الدرجة : 100
المدة : ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك ، (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول(33 د): (أ) – بين فيما إذا كانت دالة ديريخليه ذت م على الفترة $[\sqrt{2}, 5]$ و ما هو تغيرها الكلي، ثم أنها تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على نفس الفترة ، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً عليها ؟ مع ذكر السبب .

(ب) –ناقش مع التوضيح ،فيما إذا كانت دالة الجزء الصحيح اشتقاقية على الفترة $[0,9]$– مستمرة تقريباً في كل مكان و القيوسية لها على تلك الفترة.

– ابحث في إمكانية أن يكون صف المجموعات المفتوحة جبر تام – جبر مع ذكر قياس $\lambda(Q)$ مع التعليل ؟ .

(ج) –أوضح أن الدالة $y = \sqrt{x}$ مستمرة مطلقاً حسب التعريف على الفترة $[0,1]$، ثم علل هل يلزم أن يكون مشتقها محدوداً عليها إذا كانت ذت م ، و ما هو تغيرها الكلي .

السؤال الثاني(34 د): (أ) – إذا كانت الدالة f ذ ت م و قيوسة على $[a, b]$،فاثبت أن الدالة f^2 قيوسة و ذ ت م على تلك الفترة حسب التعريف للمفهومين ، ثم اكتب صيغة دالة التغير لها على نفس الفترة مع ذكر خاصتين لهذه الدالة .

(ب) –بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A \subseteq E$ قيوسة على E إذا كانت A مقيسة ، ثم إحسب تكامل ليبيغ لها على الفترة $[0,1]$ بعد التأكد من وجوده .

(ت) – اعط مثالاً على دالة f ذ ت م و g دالة متزايدة على فترة مثل $[a, b]$ ، بحيث أن الدالة $|f|$ كمولة حسب مفهوم ستيلجس بالنسبة ل g ، بينما التكامل: $\int_a^b f\, d g$ غير موجود على هذه الفترة .

– احسب قيمة تكامل ستيلجس التالي: $K = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} d x^2$ علماً أنه موجود .

السؤال الثالث(33 د):(أ) –بين أن الدوال التالية (وعلى كل فترة تقابلها) :

$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ؛ $f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ و $f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n[(1+x)e]^{-n}$ حيث $x \in]0,1[$

قيوسة ، ثم بين أن f_2 دالة تحقق شرط ليبشيز و أنها محدودة تقريباً في كل مكان عليها .

(ب)–إذا كانت $X = \mathrm{N}$ والدالة $\mu(A) = \sum_{x\in A} \frac{1}{n}$ حيث $A \in P(N)$ و $\mu(\phi) = 0$ و $\alpha_n = \frac{1}{n}$ متتالية حقيقية ، و المطلوب:

1–بين أن الدالة μ قياس على $P(N)$ ، وهل هو منته أم لا ؟ و لماذا ؟ .

2–احسب قياسات المجموعات : N ، $\{2,8,32\}$ ، $\{25\}$ وفق μ .

– إذا كانت f دالة قيوسة على E ، فاثبت أن كلاً من المجموعتين : $\{x \in E : f(x) = -\infty\}$, $\{x \in E : f(x) = \infty\}$ تكون مقيسة ، ثم علل بمثال فيما إذا كانت كل مجموعة مقيسة حسب ليبيغ يجب أن تكون محدودة و عدودة .

انتهت الأسئلة

حمص في 2014/2/12

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

مدرس المقرر: د. محمد عامر

الجمهورية العربية السورية وزارة التعليم العالي – جامعة البعث كلية العلوم – قسم الرياضيات	امتحانات الدورة الإضافية للعام $\frac{2012}{2013}$ مقرر الدوال محدودة التغير لطلاب السنة الثالثة – رياضيات	الاسم : الدرجة : 100 المدة : ساعتان

السؤال الأول (50) :

(أ) إذا كانت الدالة g ذ ت م على الفترة [a, b] (حيث a , b حقيقيان ومحدودان)، فأثبت أنّ الدالة $I(x) = \sin(g(x))$ ذ ت م على نفس الفترة ، طبعاً باستخدام التعريف.

(ب) اعتماداً على فكرة تكاملي ستيلجس الأعلى والأدنى على الترتيب للدالة f بالنسبة للدالة g على الفترة $[a, b]$ ، والمطلوب : بيّن فيما إذا كانت دالة ديريخليه φ المعطاة على الفترة $[\sqrt{2}, 4]$ كمولة أم لا بالنسبة للدالة : $g(x) = x + 5$ على نفس الفترة ؟ مع التعليل ؟

- لتكن الآن الدالة : $F(x) = (8 - x^2)[1 - \varphi(x)] \quad ; \quad x \in [\sqrt{2}, 4]$ حيث φ دالة ديريخليه السابقة. يُطلب منك :

1. إثبات أنّ F دالة قيوسة بعد إثبات أنّ φ قيوسة على نفس الفترة المفروضة.
2. أوضح هل الدالة F محدودة تقريباً في كل مكان على $[\sqrt{2}, 4]$ ؟ ولماذا ؟

(ت) بيّن من أجل المتتالية $\alpha_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$ ، أنه تصح المساواة التالية :

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\mu(\alpha_n)\right)$$

مع أنّ μ قياس منتهٍ على الجبر التام S.

(ث) هل المجموعة :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[7n, 7n + \frac{1}{\ln n}\right] - Q$$

مقيسة أياً كانت $n \geq 1$ ، وفي حالة الإيجاب ، ما هو قياسها $\lambda(A)$ ، ثمّ أضف ، أوجد $\lambda(R)$ ، $\lambda(\{-2\})$ ، $\lambda([0,1[)$.

(ج) إذا كانت الدالة f معرّفة على المجموعة E ذات القياس المعدوم (حسب ليبيغ) ، فأثبت أنّ هذه الدالة قيوسة عليها. ثمّ إذا كانت E و F مقيستان ، فهل $E\Delta F$ مقيسة ؟ مع توضيح السبب !

السؤال الثاني (50) :

(1) اكتب نص المبرهنة الخاصة بحساب تكامل ستيلجس وذلك في حال كانت f مستمرة و g تأخذ قيماً ثابتة على [a, b].

(2) إذا كانت $f \in C_{[0,1]}$ ($C_{[0,1]}$ فضاء الدّوال المستمرة على [0,1]) ، كما نعلم ليس بالضرورة أن تكون دالة ما من هذا الصف ذ ت م على [0,1] ، فبيّن ذلك بمثال توضيحي من عندك مع الإثبات وما هو التغير الكلي لهذه الدّالة على نفس الفترة ، وكتابة الواجب إضافته لتكون الدّالة المطردة بتزايد على R ذ ت م عليها.

(3) لتكن μ قياس على الجبر التام S ، ولتكن $A \in S$ مجموعة ما مثبتة ، وأضف أنّ $0 < \mu(A) < \infty$ ، ولنضع من أجل $A \in S$ العلاقة :

$$\delta(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)} \quad ; \quad B \in S$$

بيّن فيما إذا كانت δ المعرّفة بهذه العلاقة تشكل قياساً على S ، وهل هو منته - σ - منته ؟ مع التعليل ؟

(4) بعد التأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J = \int_1^3 f(x)\, d\, h(x)$$

حيث :

$$f(x) = x^2 \quad , \quad h(x) = \begin{cases} x + 1 & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ 6 & ; \quad x = 2 \\ x^2 & ; \quad 2 < x < 3 \\ 19 & ; \quad x = 3 \end{cases}$$

ثمّ أحسب قيمته بعدئذٍ.

(5) علل ، فيما إذا كانت الدّالة $\psi(x) = x^2 + 10$ تحقق شرط ليبيشتز على الفترة [2, 5] ، وهل يمكن لدالة الصحيح أن تكون مستمرة مطلقاً – ذ ت م على الفترة [0, 10] واحسب تغيرها الكلي على هذه الفترة؟

حمص في 2013/08/27م	انتهت الأسئلة مع تمنياتي لكم بالتوفيق	أستاذ المقرر د. محمد عامر

الجمهورية العربية السورية | امتحان مقرر الدوال محدودة التغير | الاسم والرقم : ....

وزارة التعليم العالي | الفصل الثاني – سنة ثالثة / رياضيات | الدرجة: 100

جامعة البعث ـ كلية العلوم | العام الدراسي (2012 - 2013) | مدة الامتحان : ساعتان

أجب عن السؤالين التاليين :

السؤال الأول (50 درجة) :

(أ) إذا كان للدالة f مشتقاً موجباً ومحدوداً على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أنّ هذه الدالة تكون ذ ت م ومتزايدة أيضاً على هذه الفترة.

(ب) أكمل النتيجة القائلة ((بفرض أنّ f دالة اشتقاقية على $[a,b]$ – ربما باستثناء عدد محدود من نقاط هذه الفترة .....)) وماهي عبارة التغير الكلي هنا للدالة f.

- طبق ذلك من أجل الدالة $\mathrm{f}(x)=\sin x$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ مع حساب تغيرها الكلي على هذه الفترة.

(ت) إذا كانت الدالتان f و g حيث الأولى f مستمرة والثانية g مستمرة و ذ ت م على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أنّ الدالة :

$$\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(u)dg(u) \quad ; x\in[a,b]\ ,F(a)=0$$

ذ ت م على $[a,b]$ ، ثم أنها قيوسة على تلك الفترة.

(ث) اختر تجزئة مناسبة للفترة $[0,2]$ ، بحيث تكون الدالة :

$$f(x)=\begin{cases}0 & ;x=0\\ x^2\sin\frac{\pi}{x^2} & ;0<x\le 2\end{cases}$$

ليست ذ ت م على هذه الفترة بدون حل ، وهل يمكن أن تكون هذه الدالة مستمرة مطلقاً ومنحنيها قابل للتقويم على $[0,2]$ ؟ مع التعليل ؟

- اقترح تعديلاً لتصبح الدالة المفروضة ذ ت م على الفترة المذكورة (أيضاً دون ذكر حل).

(ج) اذكر دالتان متزايدتان ومحدودتان على فترة مغلقة ومحدودة بحيث يكون الفرق بينهما دالة ذ ت م عليها ، وما هي مجموعة نقاط انقطاعها ، وما هو قياسها حسب ليبيغ ؟ ولماذا ؟

السؤال الثاني (50 درجة) :

(1) تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي :

$$J=\int_0^3 \operatorname{arc}\tan x\ d(8x)$$

وفي حال وجوده ، احسب قيمته عندئذٍ.

(2) اكتب صيغة الدالة λ^* (قاعدة الربط) مع ذكر كل الشروط التي تكون معها هذه الدالة قياساً خارجياً على مجموعة تعريفها ، ثم أثبت صحة أول شرطين فقط من هذه الشروط.

(3) متى نقول عن قياس أنه منتهٍ ، σ- منتهٍ – ثم وضح أنّ قياس ليبيغ λ في المجموعة R هو σ- منتهٍ من أجل المجموعات :

$$E_n=[-n,-n+1[\ \cup\ [n-1,n[\ \ ;n=1,2,\ldots$$

(4) – ليكن لدينا صف المجموعات وحيدة العنصر : $\mathcal{A}=\{\{x\}\ ;\ x\in R\}$ والمطلوب :

هل هذا الصف جبراً ؟ ولماذا ؟ علماً أنه تبولوجيا وما العلاقة بين الجبر والتبولوجيا ؟

- بيّن أنّ كل مجموعة وحيدة العنصر مثل $\{y\}$ في R هي بوريلية ، وهل هي لوبيغيه ؟ وما هو قياسها في هذه الحالة ؟

(5) بيّن فيما إذا كانت المجموعة :

$$I=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\ x\ ;\ \frac{1}{k+1}\le x<\frac{1}{k}\right\}$$

مقيسة حسب مفهوم ليبيغ ، وما هو قياسها إن كانت مقيسة ؟ مع أن مجموعاتها منفصلة مثنى مثنى.

حمص في 2013/6/11

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة البعث ـ كلية العلوم

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الأول سنة ثالثة / رياضيات
العام الدراسي (2012 - 2013)

الاسم: [redacted]
الدرجة : 100
مدة الامتحان : ساعتان

مع مراعاة ترتيب ورقتك أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول :

(1) إذا كانت g دالة كمولة ريمانياً على الفترة المغلقة والمحدودة $[a , b]$، فأوضح فيما إذا كانت الدالة G والمعرّفة بالشكل:
$G(x) = c + \int_a^x g(t)dt \,; x \in [a , b]$ مستمرة مطلقاً على هذه الفترة أم لا ؟ مع ذكر السبب. (حيث c ثابت حقيقي مغاير للصفر).

(2) أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ تحقق شرط ليبتشز على الفترة $[1 , 5]$ ثم علل بكلمات فيما إذا كانت f ذ ت م – قيوسة ومستمرة بانتظام على تلك الفترة.

(3) تحقق من أن متتالية الدوال : $\varphi_n(x) = (1 - x)^n$ متقاربة تقريباً في كل مكان على الفترة $[0,1]$ من دالة يُطلب ذكرها هنا ، وهل هي متقاربة من تلك الدالة بالقياس مع ذكر هل العكس صحيح أم لا ؟ على نفس الفترة ($n \geq 1$) .

السؤال الثاني :

(1) إذا كانت f دالة ذ ت م وقيوسة على $[a , b]$، فأثبت أن مربعها (f^2) يكون كذلك على تلك الفترة باستخدام التعريف لكل مفهوم على حدى.

(2) بيّن أنّ :
$$J = (s) \int_0^\infty e^{-x} \, d[x] = \frac{1}{e-1}$$
علماً أن التكامل موجود على الفترة $[0 , \infty[$، وهل الدالة الدرجية هنا مستمرة تقريباً في كل مكان على فترة مثل $[a , b]$ ؟ ولماذا ؟ وما هو تغيّرها الكلي ، أي الدالة الدرجية على $[a , b]$.

(3) بفرض أنّ : $X \neq \emptyset$ مجموعة ما ، **والمطلوب إثبات** أن الصف $P(X)$ هو صف مطرد ، وأن الصف $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ جبراً تاماً على X حيث μ^* قياس خارجي على $P(X)$ ، وهل $\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}$ بدون تعليل ؟ .

السؤال الثالث :

(1) نعلم إذا كان للدالة h مشتقاً h' محدوداً على $[a, b]$ فتكون ذ ت م عليها ، أتكون هذه النتيجة صحيحة فيما لو لم يكن هذا المشتق موجوداً في عدد منتهٍ من نقاط $[a , b]$ ، بيّن ذلك بمثال من عندك.

(2) لنعرف على الجبر التام S على مجموعة ما X الدالة μ بالعلاقة: $\mu(E) = 0$ حيث $E \in S$، فعلل إذا كانت شروط القياس هنا محققة على S وهل هو منتهٍ أيضاً ؟ ولماذا ؟ .

– خذ المتتالية $F_n = [0 , \frac{n+1}{n}]_{n\geq 1}$ ، فأوجد $\lim_{n\to\infty} F_n$ ، وما هو قياس ليبيغ لها ؟ .

(3) ليكن المشتق المستمر f' للدالة f على $[a , b]$ والمطلوب إثبات أنّ :
$$\sum_{n=[a]+1}^{[b]} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)((x))\, dx + f(a)((a)) - f(b)((b))$$
حيث : $((x)) = x - [x]$ ، مع أنّ التكاملات جميعها موجودة، ثم انظر ماذا تستنتج عندئذٍ.

حمص في 2013/1/17 م

انتهت الأسئلة
مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

أستاذ المقرر
د. محمد عامر

جامعة البعث	امتحانات الدورة الثالثة 2012/2011	الاسم : ..[redacted]
كلية العلوم	السنة الثالثة – رياضيات	المدة : ساعتان
قسم الرياضيات	مقرر الدوال محدودة التغير	الدرجة : 100

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : " تمنع الحاسبات "

السؤال الأول (40 د):

(أ)- إذا كانت الدالة f ذ ت م على [a,b] فأثبت اعتماداً على التعريف أن الدالة $\frac{1}{f}$ بشرط (f≠0) ذ ت م على نفس الفترة مع ذكر تغيرها الكلي عليها ، ثم احسب التغير الكلي للدالة ؛ $g(x)= \sin^4(x) + \cos^4(x)$ على الفترة [0,π] .

(ب)- إذا كانت الدالة $h(x)=\sqrt[3]{x}$ معرفة على الفترة [0,3] فهل كون المشتق h' محدودا شرط ضروري لتكون الدالة ذ ت م عليها ، قرر ذلك مع التعليل ؟

(ج)- أثبت أن تقاطع أسرة من الجبور التامة في X≠∅ هو جبر تام في X ، وهل صف الفترات المفتوحة في ℝ جبر- جبر تام ؟ ولماذا ؟

السؤال الثاني (35 د):

(1)- بفرض لدينا الدالتين f_1 و f_2 والمعرفتان على [-1,4] وفق الصيغتين التاليتين :

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & ; x\neq 0\\ 5 & ; x=0\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}0 & ; x\neq 0\\ 3 & ; x=0\end{cases}$$

والمطلوب:

ادرس فيما إذا كان تكامل ستيلجس $J=\int_{-1}^{4} f_1\, df_2$ موجوداً وذلك بطريقتين مختلفتين، وإن كان موجوداً فاحسبه.

(2)- إذا كان c∈ℝ و f دالة معرفة على المجموعة E المقيسة عندئذٍ إذا كانت E(f≤c) مقيسة فبين أن المجموعة : E(f>c) أيضاً مقيسة من أجل c ،وهل هذا يؤدي بدوره إلى أن المجموعة E(f ≥ c) كذلك مقيسة؟ ولماذا؟

(3)- إذا كانت G مجموعة قابلة للعد على الأكثر ، فاثبت أنها ذات قياس معدوم حسب ليبنغ .

السؤال الثالث (25 د):

(أ)- ليكن S جبراً تاماً على X≠∅ والعنصر x∈X ولنضع

$$\delta_x(A)=\begin{cases}1 & ; x\in A\\ 0 & ; x\notin A\end{cases}\quad , A\in S$$

والمطلوب :

(1)- بين أن الدالة δ_x قياساً على S وماذا يسمى هذا النوع من القياس؟ وهل هو احتمالي ؟ ولماذا؟

(2)- بين فيما إذا كان σ - منته ، ولماذا؟ وهل هو منته؟

(ب)- لتكن f دالة ذ ت م على الفترة [a,b] ، أثبت أن دالة التغير لها متزايدة و ذ ت م على نفس الفترة ، وهل يمكن أن تكون هذه الأخيرة قيوسة على [a,b]؟ وضح ذلك مع التعليل؟

حمص في 2012/10/7

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالنجاح

أستاذ المقرر

د. محمد عامر

جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحان الفصل الأول للعام $\frac{2011}{2012}$ لمقرر الدوال محدودة التغير السنة الثالثة - رياضيات	الاسم : المدة : ٢ سا الدرجة : ١٠٠

==

أجب عن الاسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في أجابتك : (تمنع الحاسبات)

السؤال الأول : (30°)

١. إذا كانت الدالة f مطردة على الفترة [a , b] فاثبت أنها ذ ت م مع ذكر تغيرها الكلي عليها ، وهل يمكن للدالة $f(x)=e^x$ أن تكون ذ ت م على الفترة] ∞+ , 0]_ مع التعليل ؟

٢. ليكن $\mu^*(E)=0$, والمطلوب : إثبات أن المجموعة E تكون مقيسة بالنسبة للقياس الخارجي μ^* .

٣. أوجد دالة التغير للدالة : $h(x)=[x]+9$ على الفترة [1 , 4] ، ثم بين أن $V_a^b\,(v_h(x)) = V_a^b\,(h)$

السؤال الثاني : (30°) :

١. لتكن لدينا التجزئة $T_n = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\}$ للفترة المغلقة [0 , 1] ، والمطلوب :
بين بأستخدام هذه التجزئة والتعريف فيما إذا كانت الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} : 0 < x \le 1 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

ذ ت م على [0 , 1] ، أم لا ؟ ولماذا ؟ وماهو تغيرها الكلي عندئذ ؟ .

٢. إذا كانت $\lambda(E) = 0$ ، فإن الدالة f المعرفة على E المقيسة تكون قيوسة عليها

٣. لتكن المجموعة $A \subset X$ (حيث $X \neq \emptyset$) فاكتب الجبر التام التي تولده هذه المجموعة ، وماذا نعني بقياس ليبيغ λ ثم أوجد : λ(Q) ، λ([-1,9[) ، λ({0}) .

السؤال الثالث : (24°)

١- أكتب الدالة $g(x)=\arctan x$ *على الفترة* [0 , 1] *على شكل تكامل بحده الأعلى مع أثبات أن الدالة* g ذ ت م على تلك الفترة ثم أحسب تغيرها الكلي عندئذ.

٢- خذ الدالة g السابقة وأحسب التكامل التالي : $J = (S)\int_0^1 \frac{x}{4}\,dg(x)$ بعد التأكد من وجوده .

السؤال الرابع (16°)

١- بين أن الدالة Ψ المعرفة على الفترة [1 , 1-] *بالشكل :*

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} \; ; & x \neq 0 \\ 0 \; ; & x = 0 \end{cases}$$

قيوسة على تلك الفترة

٢- أثبت أن كلا من مجموعة الأعداد العادية والغير عادية التي تنتمي إلى الفترة $[\sqrt{2}, 5]$ تكون مقيسة حسب مفهوم ليبيغ وأحسب قياس كل منها

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالنجاح

أستاذ المقرر د. محمد عامر

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
لطلاب السنة الثالثة رياضيات
الفصل الأول للعام 2010-2011

الاسم:
الرقم:
المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقة الإجابة : (يمنع استخدام الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (25 درجة):

(أ) أوجد دالة التغير للدالة : $h(x)=\cos x$ على الفترة $[0,\pi]$ ، ثم بين أن الدالة $f(x)=|x|$ قيوسة على نفس الفترة و احسب تكامل ستيلجس للدالة f بالنسبة لـ h على الفترة $[0,\pi]$ بعد التأكد من وجوده.

(ب) إذا كانت $\mu^*(G)=0$ ، حيث μ^* قياس خارجي على $P(X)$ ، فأثبت أن:

$$\mu^*(E\cup G)=\mu^*(E-G)=\mu^*(E)$$

حيث E مقيسة بالنسبة لـ μ^* و تنتمي إلى $P(X)$.

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) لتكن الدالتان: $g(x)$ و $f(y)$ حيث الأولى مستمرة مطلقا على الفترة $[a,b]$ و الثانية تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[\alpha,\beta]$، و أضف إلى هنا مجموعة قيم g محتواة في الفترة $[\alpha,\beta]$. و المطلوب: إثبات أن تركيبهما $(f\circ g)$ دالة مستمرة مطلقا على $[a,b]$ باستخدام التعريف.

(ب) إذا كانت الدالتان

$$f(x)=\begin{cases} x & ; \ 0\le x<1 \\ 2 & ; \ x=1 \\ x+1 & ; \ 1<x\le 2 \end{cases} \qquad \text{و كذلك} \qquad \varphi(x)=[x]$$

فهل تكامل ستيلجس f بالنسبة لـ φ موجود ؟ مع التعليل ؟ على الفترة $[0,2]$.

السؤال الثالث (25 درجة):

(أ) وضح فيما إذا كانت دالة محدودة التغير على فترة $[a,b]$ هي قيوسة عليها ؟

(ب) أثبت أن أية دالة ثابتة قيوسة على المجموعة E المقيسة، ثم احسب تكامل ليبيغ لها على المجموعة $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{7n},\frac{1}{7n}+\frac{1}{2^n}\right]$ بعد التأكد من وجوده، و هل كل دالة كمولة لوبيغياً هي كمولة ريمانياً ؟ اذكر مثالا يدعم ذلك بدون حل.

(ت) بين أن الصف: $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ جبر تام على X ، حيث μ^* قياس خارجي على $P(X)$.

السؤال الرابع (25 درجة):

(أ) أثبت " إذا كانت الدالتان f مستمرة و g محدودة التغير على الفترة $[a,b]$، فإن التكامل $(S)\int_a^b f\,dg$ يكون موجوداً ".

(ب) لتكن $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ متتالية من الدوال القيوسة على المجموعة E بحيث أن $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.e} f$ ، فإذا كان: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.e} g$، و المطلوب: إثبات أن: $f \overset{a.e}{=} g$.

حمص في 17 / 1 / 2011 انتهت الأسئلة مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرس المقرر: د. محمد عامر

جامعة البعث — امتحان الدورة الفصلية الصيفية للعام ٢٠١٠-٢٠١١ — الاسم:

كلية العلوم — لمقرر الدوال محدودة التغير — المدة: ٢ سا

قسم الرياضيات — لطلاب السنة الثالثة - رياضيات — الدرجة: ١٠٠

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقة الإجابة: (تمنع الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (١٠ درجة):

أ- إذا كانت الدالة f ذات تغيرات محدودة على الفترة $[a,b]$ ، فاثبت أنه يلزم ويكفي أن توجد دالة $G(x)$ متزايدة ومحدودة على $[a,b]$ وتحقق العلاقة :

$$|f(x'')-f(x')|\le G(x'')-G(x')\ ;\ a\le x'<x''\le b$$

ب- احسب تكامل ستيلجس (علما أنه موجود) : $J=(s)\int_0^1 \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx^2$ باستخدام طريقة تبديل المتغير .

ت- بين فيما إذا كانت الدالة: $h(x)=[x]$ مستمرة تقريبا في كل مكان على الفترة $[-1,5]$ ، وهل هي قيوسة أم لا على هذه الفترة ، ولماذا ؟

ث- إذا كانت μ دالة مجموعات معرفة على $S=\mathcal{P}(X)$ حيث $X\neq\phi$ كما يلي : $\mu(E)=0\ ;\ \forall E\subseteq X$ ، فاثبت أن μ قياس على S و أنه متزايد ، وهل هو منته أم لا ؟ مع ذكر السبب .

السؤال الثاني (٣٠ درجة):

أ- لتكن لدينا الدالة g المعرفة على الفترة $E=[0,4]$ بالشكل :

$$g(x)=\begin{cases} x^2-3 & ;\ x\in[0,4]-\mathbb{Z} \\ 0 & ;\ x\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

والمطلوب : ١- هل g دالة قيوسة على $E=[0,4]$ ؟ مع التعليل ؟

٢- بين أن الدالة $h(x)=x^2-3$ قيوسة على E ، ثم احسب قيمة تكامل ليبيغ للدالة h على E بعد التأكد من وجوده .

ب- اثبت أن تقاطع أسرة من الجبور التامة غير الخالية على X هي من جديد جبر تام على X ،ثم اذكر صفين مولدين لجبر بوريل .

ت- اذكر مثالاً لدالة مستمرة على فترة محدودة $[a,b]$ وليست ذات تغيرات محدودة عليها ، مع إثبات ذلك .

السؤال الثالث (٣٠ درجة):

أ- لتكن لدينا الدالة : $B(x)=c+\int_a^x g(u)\,du$ حيث g دالة كمولة ريمانيا على الفترة $[a,b]$ و c ثابت ما ، فهل الدالة B مستمرة مطلقا على الفترة $[a,b]$ باستخدام التعريف ، وإذا كانت كذلك فهل هي كمولة لوبيغيا على تلك الفترة ؟ ولماذا ؟

ب- أوجد دالة التغير للدالة : $f(x)=\begin{cases} x & ;\ 0\le x<1 \\ x^2 & ;\ 1\le x\le 3\end{cases}$ على الفترة $[0,3]$ ، ثم بين فيما إذا كانت الدالة $V_0^x(f)-f$ ذات تغيرات محدودة على نفس الفترة ، مع التعليل ؟

ت- أثبت أن متتالية الدوال التي حدها العام : $F_n(x)=x^n\ (n\ge 1)$ متقاربة تقريبا في كل مكان من دالة يطلب تعينها على الفترة $[0,1]$ ، وهل دالة النهاية قيوسة على تلك الفترة ؟ ولماذا ؟

حمص في ٢٠١١/٨/١٥ — انتهت الأسئلة — مدرس المقرر

مع تمنياتي لكم بالتوفيق — د. محمد عامر

الفصل الدراسي الأول ٢٠١٠/٢٠٠٩

السنة الثالثة - رياضيات

المدة: ساعتان

السؤال الأول (٢٠ درجة): (أ) - لتكن f دالة مستمرة و g دالة محدودة التغير على الفترة $[a,b]$، و لنضع

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dg(t) \;;\quad x \in [a,b]$$

، و المطلوب:

١- أثبت أن الدالة F محدودة التغير على الفترة $[a,b]$.

٢- إذا كانت الدالة g مستمرة في النقطة $x = x_0$، فبين أن الدالة F تكون كذلك.

(ب) اذكر مثالاً عن دالة تحقق شرط ليبشتز على فترة مغلقة و محدودة، بحيث تكون فيه مستمرة مطلقاً و قابلة للمكاملة لوبيغيا على الفترة، مع ذكر الحل فقط لتحقق الشرط على الفترة المذكورة.

السؤال الثاني (٢٠ درجة): (أ). لتكن لدينا الدالة:

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 5 & ; \quad x = 1 \\ x + 3 & ; \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

ب:

١- اكتب هذه الدالة على شكل فرق دالتين متزايدتين على الفترة $[0,2]$.

٢- إذا كانت $f_1(x) = e^x$ معرفة على $[0,2]$، فاحسب قيمة التكامل $(S)\int_0^2 f_1(x)\,d\psi(x)$ بعد التأكد من وجوده.

(ب) إذا كانت الدالة f مستمرة تقريباً في كل مكان على المجموعة E، فإن f تكون قيوسة على E.

السؤال الثالث (٢٠ درجة): (أ). لتكن f دالة حقيقية معرفة على الفترة $[0,1]$ بالشكل:

$$f(x) = 0 \;;\; x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right[,\; f(x) = \tfrac{1}{2} \;;\; x \in \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right[,\; f(x) = \tfrac{3}{4} \;;\; x \in \left[\tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}\right[,\; \ldots ,\; f(x) = 1$$

بين أن هذه الدالة المتزايدة تقفز عند كل نقطة: $x_k = 1 - \frac{1}{2^k} \;;\; (k \ge 1)$ تساوي $\frac{1}{2^k}$، ثم أحسب:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[f(x_k + 0) - f(x_k - 0)\right].$$

(ب) لتكن المجموعة $X = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\}$ و الجبر التام $S = \mathcal{P}(X)$، و لنضع

$$\mu(\phi) = 0 \;,\quad \mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} \;;$$

. أثبت أن μ تعرف قياساً على S، وهل هو منتهٍ؟ مع التعليل.

السؤال الرابع (٢٠ درجة): لنعرف الدالة f بالشكل: $f(x) = x^2\left[1 - \varphi(x)\right] \;;\; x \in [2,5] = E$ حيث φ دالة ديريخليه على E، والمطلوب:

١- هل الدالة $h(x) = 1 - \varphi(x)$ مكمولة حسب ستيلتجس بالنسبة للدالة $g(x) = 2x$ على الفترة $E = [2,5]$، ولماذا؟

٢- بين أن دالة ديريخليه تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على الفترة E،

٣- تحقق من وجود التكامل $(L)\int_E f(x)\,d\lambda$، ثم أحسب قيمته في حال وجوده.

انتهت الأسئلة

٢٠١٠/١/١٧ مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

مدرس المقرر

د. محمد عامر

أجب عن ... أسئلة ... كل سؤال صفحة: ..... الاسم: ....

(يمنع استخدام الآلات الحاسبة)

السؤال الأول (30 درجة):

(أ) إذا أمكن كتابة الدالة g بالشكل:

$$g(x)=c+\int_a^x \varphi(t)\,dt \quad ; x\in[a,b]$$

بحيث أن التكامل $\int_a^b|\varphi(t)|dt$ موجود و محدود ، عندها أثبت أن g محدودة التغير على الفترة $[a,b]$.

(ب) اكتب الدالـة $g(x)=arctgx$ علـى الفتـرة $[0,\sqrt{3}]$ كما في الطالب الأول ثم بين أن التكامل $J=(S)\int_0^{\sqrt{3}} x^2 dg(x)$ موجود واحسبه عندئذ ، كما و يطلب حساب $=\overset{\sqrt{3}}{\underset{0}{V}}(g)$.

(ت) إذا كانت $f(x)\overset{\infty}{=}0$ على المجموعة E المقيسة ، فإن $\int_E f(x)d\lambda=0$ بدون إثبات ، والمطلـوب:

هل العكس صحيح بشكل عام ؟ وضح ذلك بمثال مع الحل.

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) لتكن الدالة h المعرفة على الفترة $[0,1]$ بالشكل التالي:

$$h(x)=\begin{cases}0 & ; x=0\\ \dfrac{1}{x^a} & ; 0<x\le 1\end{cases} \quad ; 0<a<1$$

والمطلوب: هل الدالة كمولة حسب مفهوم ليبيغ على الفترة $[0,1]$ ، ثم احسبه في حال وجوده.

(ب) ماذا نقصد بـ: جبر بوريل ، مع ذكر طريقتين لتوليده. - التقارب بالقيـاس لمتتاليـة دوال ، و مـا هي العلاقة بينه و بين مفهوم التقارب تقريبا في كل مكان على مجموعة E ، و أيهما لا يؤدي إلى الآخر.

(ت) أثبت أن الدالة المميزة للمجموعة A المقيسة من المجموعة E المقيسـة $(I_A(x))$ قيوسـة علـى E (بعد كتابة صيغتها)، و ما هي قيمة $=I_{A\cup\overline{A}}(x)$.

السؤال الثالث (25 درجة):

(أ) لتكن متتالية الدوال $\{\psi_n(x)\}_{n\ge1}$ المعرفة بالشكل $\psi_n(x)=x e^{-nx}$ على الفترة $[1,3]$ ، و لتكن الدالة:

$$g(x)=\begin{cases}(x-2)^2\sin\dfrac{1}{x-2} & ; x\ne 2\\ 0 & ; x=2\end{cases}$$

والمطلوب: 1) إيجاد الدالة $\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=\psi(x)$ على الفترة $[1,3]$.

2) بين (مع التعليل) فيما إذا كانت المساواة التالية صحيحة:

$$\lim_{n\to\infty}(S)\int_1^3\psi_n(x)dg(x)=(S)\int_1^3\psi(x)dg(x)$$

(ب) لتكن متتالية المجموعات $\{A_n\}_{n\ge1}$ حيث $A_n=\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right]$ ، والمطلوب:

i) أوجد نهاية هذه المتتالية.

ii) أثبت أن $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ مقيسة حسب ليبيغ ، ثم احسب قياسها بطريقتين مختلفتين.

انتهت الأسئلة

دمشق في .../.../2010

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المقرر: د. ... ...

جامعة البعث — امتحانات الدورة الإضافية من العام الدراسي 2009 - 2010

كلية العلوم [redacted]

قسم الرياضيات — الدرجة: 80 — المدة: 2 ساعة — الاسم:

السؤال الأول (27 درجة): (أ) إذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[a,b]$، فأثبت أنها تكون محدودة التغير على هذه الفترة، و ما هو تغيرها الكلي عندئذٍ.

(ب) بين أن الدالة $g(x) = x - x^2$ تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[0,2]$، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً و قياسية على تلك الفترة؟ وضح ذلك.

(ت) إذا كانت الدالة $h(x) \overset{a.e}{=} 0$ على المجموعة C فإن: $\int_C h(x)d\lambda = 0$، و المطلوب: هل عكس ذلك صحيح؟ وضح ذلك بمثال من عندك مع ذكر الحل.

السؤال الثاني (33 درجة): (أ) احسب قيمة التكامل التالي: $J = (S)\int_0^5 e^x dg(x)$، حيث:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & : 0 \le x \le 1 \\ 0 & : 1 < x \le 4 \\ 2 & : 4 < x \le 5 \end{cases}$$

بعد التأكد من وجوده.

(ب) اثبت أن الدالة $\varphi(x) = [x]$ قياسية على الفترة $[0,5]$، و ما هي مجموعة نقاط انقطاعها على هذه الفترة؟ و ما هو قياسها؟ و هل هي مستمرة تقريباً في كل مكان على هذه الفترة؟ مع التعليل؟

(ت) ليكن $X = \{1,2,\ldots,6\}$ فضاء الحوادث الابتدائية (مجموعة النتائج) لتجربة عشوائية، فمن أجل حدث ما $A = \{1\} \subset X$، لنأخذ الصف $T = \{\emptyset, A, A^c, X\}$، ابحث فيما إذا كان هذا الصف يشكل جبراً - جبراً تاماً؟ و ماذا نسمي هذا النوع من الجبور في حالة الإيجاب؟

السؤال الثالث (20 درجة): (أ) أثبت أن المجموعة $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}+\frac{1}{7^n}\right]$ مقيسة، و ما هو قياسها؟ ثم تأكد من وجود التكامل: $I = (L)\int_E f(x)d\lambda$، حيث $f(x) = 6 = const$، و احسبه.

(ب) - ماذا نقصد بالتقارب بالقياس لمتتالية دوال ما، و ما هي العلاقة بين التقارب بالقياس و التقارب تقريباً في كل مكان على مجموعة ما و لتكن E.

- لتكن لدينا المتتالية: $B_n = \left[0, \frac{n-3}{n}\right]$، أوجد نهايتها، و ما هو قياسها حسب مفهوم ليبيغ.

حمص في 20 / 9 / 2010 — انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المقرر: د. محمد عامر

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الإضافية من العام الدراسي 2009 - 2010
مقرر التوابع محدودة التغير لطلاب السنة الثالثة – رياضيات
الدرجة: 80 — المدة: 2 ساعة — الاسم:

السؤال الأول (30 درجة):

(أ) اثبت أنه إذا كان للدالة f مشتق موجب محدود على الفترة $[a,b]$، فإنها تكون محدودة التغير على هذه الفترة، و هل هي كمولة حسب لبيغ على هذه الفترة ؟ وضح ذلك.

(ب) إذا كانت $\mu^{*}(E)=0$ ، فاثبت أن (E) مجموعة مقيسة بالنسبة لـ μ^{*} (حيث μ^{*} قياس خارجي على X غير خالية).

(ت) لتكن الدالة:

$$\varphi(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & ; \ x\neq 0 \\ 0 & ; \ x=0 \end{cases}$$

على الفترة $[0,1]$.

بين أن هذه الدالة ليست محدودة التغير على هذه الفترة، وهل هي مستمرة مطلقا و كبوسة على تلك الفترة ؟ و لماذا ؟

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) اثبت أن الدالة

$$h(x)=\begin{cases} 0 & ; \ x=0 \\ \frac{1}{x^{2}} & ; \ x\neq 0 \end{cases}$$

كبوسة على الفترة $[-1,1]$ باستخدام التعريف.

(ب) احسب قيمة التكامل التالي

$$J=(S)\int_{-1}^{3} x^{2}\,dg(x)$$

حيث

$$g(x)=\begin{cases} [illegible] & ; \ -1\le x\le 0 \\ 1 & ; \ 0<x\le 2 \\ 1-x^{2} & ; \ 2<x\le 3 \end{cases}$$

، بعد التأكد من وجوده على هذه الفترة.

السؤال الثالث (25 درجة):

(أ) ليكن S جبرا تاما على مجموعة X غير خالية ، و ليكن μ قياسا على S بحيث أن: $0<\mu(A)<\infty$; $A\in S$ ، و لنضع من أجل المجموعة المثبتة $A\in S$ المساواة: $\delta(B)=\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}$; $B\in S$ بين فيما إذا كانت δ قياسا على S، و إن كان إيجاباً ، فهل هو σ – منته؟ مع التعليل.

(ب) إذا كانت G مجموعة مقيسة على الفترة $[a,b]$ ، فتأكد من وجود التكامل $I=(L)\int_{[a,b]} I_G(x)\,d\lambda$ حسب لبيغ، ثم احسب قيمته عندئذ، حيث I_G هي الدالة المميزة للمجموعة G.

انتهت الأسئلة

حمص في 22 / 9 / 2010 — مع تمنياتنا لكم بالتوفيق

مدرس المقرر: د. محمد عامر